
Grundlagen der Konstruktion von Sonnenuhren

Manfred Steinbach (†), Ludwig Meier¹ und Karl-Heinz
Weßlau²

Sonnenuhren sind beliebter Schmuck für repräsentative Gebäude und Anlagen. Man beobachtet aber nicht selten, dass die Anzeigefehler solcher Uhren im Widerspruch zu dem auf sie verwendeten feinmechanischen und künstlerischem Aufwand stehen. Es werden Näherungsformeln zur Berechnung von Sonnenuhren angegeben, die einerseits so einfach sind, dass sie z.B. auf programmierbaren Taschenrechnern zu verarbeiten sind, und die es andererseits gestatten, die etwa mögliche Grenzgenauigkeit von 2 min zu erreichen. Im Folgenden werden Sonnenuhranordnungen mit sphärischen, zylindrischen und verschiedenen ebenen Skalen behandelt.

1 Berechnung der Sonnenkoordinaten

Für die Berechnung der Schattenpositionen werden je nach der Art der Uhrkonstruktion Stundenwinkel τ und Deklination δ der Sonne (äquatorale Anordnungen) oder Azimut α und Höhe h (azimutale Anordnungen) benötigt. Diese Werte ergeben sich folgendermaßen:

¹ Dr. rer. nat. Ludwig Meier gilt als der Vater der modernen Projektionsplanetarien von ZEISS. Er arbeitete von 1958 bis 1998 in der Entwicklung des Astro-Geschäftsfeldes von ZEISS in Jena.

² Dr.-Ing. Karl-Heinz Weßlau, Diplom-Ingenieur für angewandte Mechanik arbeitete von 1960 bis 1995 bei Carl Zeiss in Jena als Berechnungsingenieur, Projekt- und Laborleiter.

1.1 Sonnenkoordinaten im äquatoralen System

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin I \quad (1)$$

ε Neigung der Ekliptik $\approx 23,45^\circ$, I Länge der Sonne auf der Ekliptik

$$I [^\circ] = \frac{S360}{365} - 1,87 - 1,92 \times \sin \left[\frac{360(S-104)}{365} \right] \quad (2)$$

S Tag des Jahres, Zählung beginnt mit dem 21.März ($S=0$) [Tafel 1]

$$\tau [^\circ] = t_{MEZ} 15 [^\circ/h] + (\lambda_x - \lambda_0) [^\circ] + ZGL [^\circ] 180^\circ \quad (3)$$

τ Stundenwinkel der Sonne.

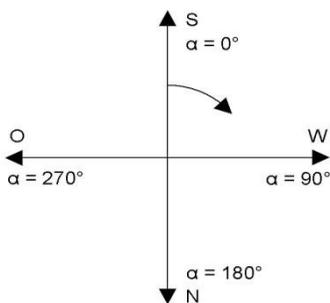


Bild 1. Astronomische Definition des Azimutwinkels

Der Stundenwinkel ist nach Division durch $15^\circ/h$ gleich der wahren Ortssonnenzeit. Soll eine Sonnenuhr wahre Ortssonnenzeit anzeigen, dann ist für 12 h $\tau = 0$ zu nehmen, für 11 h $\tau = -15^\circ$, für 13 h $\tau = 15^\circ$ usw. Im Allgemeinen soll eine Sonnenuhr jedoch mittlere Sonnenzeit für einen bestimmten Meridian λ_0 anzeigen, z.B.

Mitteuropäische Zeit (MEZ), die auf den Meridian $\lambda_0 = 15^\circ$ bezogen ist und die z.B. der Ortszeit von Görlitz gleich ist. Für einen Ort anderer geografischer Länge λ_x ist τ um die Längendifferenz gegen den Bezugsmeridian zu korrigieren. Zum Beispiel gilt für Jena $\lambda_x = 11,59^\circ$; $\lambda_x - \lambda_0 = -3,42^\circ$. Diese Korrektur berücksichtigt die Tatsache, dass zum Zeitpunkt 12 h MEZ die (mittlere) Sonne zwar in Görlitz genau im Süden steht, dass aber z.B. noch 13,66 min vergehen, ehe das in Jena der Fall ist. Mit der λ -Korrektur wird also erreicht, dass die Sonnenuhr die wahre Ortszeit des Bezugsmeridians anzeigt. Mit dieser Korrektur begnügen sich die meisten Sonnenuhrkonstruktionen. Die mitteleuropäische Zeit ist aber eine mittlere Zeit. In ihr sind Unregelmäßigkeiten der scheinbaren Sonnenbewegung infolge der Elliptizität der Erdbahn und der Neigung der Erdachse gegen die Erdbahnnormale ausgemittelt. Damit eine Sonnenuhr mittlere Zeit anzeigt, müssen diese Einflüsse berücksichtigt werden. Das erfolgt durch eine Korrekturfunktion, die sogenannte Zeitgleichung, für die folgende Näherung für unseren Zweck ausreichend ist:

$$ZGL[^\circ] \approx -1,779 \cos \delta - 0,446 \sin \delta - 0,150 \cos 2\delta + 2,461 \sin 2\delta \quad (4)$$

$$\delta = \frac{360[^\circ] S[d]}{365[d]} \quad (5)$$

Die Nichtberücksichtigung der Zeitgleichung führt zu Fehlern der Uhranzeige von maximal ± 16 min. Gegenüber der konstanten Längenkorrektur ist, wie man sieht, die Zeitgleichungskorrektur jahreszeitabhängig. Das führt zu gewissen Komplikationen bei der Gestaltung der Uhrskalen und ist Ursache dafür, dass einfache Anordnungen auf die Korrektur verzichten.

Tafel 1.

Datum	S	
Frühlingsäquinoktium	0	Äquinoktium: Tagundnachtgleiche Zeitpunkt, zu dem die Sonne auf ihrer jährlichen Zeitpunkt, zu dem die Sonne auf ihrer jährlichen und für alle Orte auf der Erde Tag und Nacht gleich lang sind
Sommersolstitium	92,7	
Herbstäquinoktium	186,3	
Wintersolstitium	276,1	
Januar	286	
Februar	317	
März	345	Solstitium: Sonnenwende, findet zweimal im Jahr statt Zeitpunkte, zu denen die Sonne ihre größte nördliche bzw. ihre tiefste südliche Deklination erreicht
April	11	
Mai	41	
Juni	72	
Juli	102	
August	133	
September	164	
Oktober	194	
November	225	
Dezember	255	

1.2 Sonnenkoordinaten im azimutalen System

Mit den bereits berechneten Größen werden

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \tau \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \cos \delta \sin \tau \cos h \quad (7)$$

$$\cos \alpha = (\sin \varphi \sin h - \sin \delta) \sec \varphi \sec h \quad (8)$$

φ geographische Breite des Standortes, h Höhe der Sonne über dem Horizont, α Azimut der Sonne (Bild 1). Das berechnete h müsste streng genommen um den Betrag der atmosphärischen Refraktion korrigiert werden. Der Einfluss ist aber nur in

unmittelbarer Nähe des Horizontes (Sonnenauf- und untergang) für die ersten bzw. letzten 3 min mit einer Sonnenuhr zu bemerken.

2 Möglichkeiten des prinzipiellen Aufbaus

Die Anzahl der bekannten Anordnungen ist Legion. Die Verfasser beschränken sich bei der Beschreibung auf solche, bei denen ein Schattenpunkt in Kugel-, Zylinder- oder ebenen kartesischen Koordinaten gemessen wird.

2.1 Halbhohlkugel mit Schatter im Kugelmittelpunkt (Bild 2)

Die Gravur befindet sich in der hohlen Kugelinnenwand, wobei sowohl vom azimutalen als auch vom äquatoralen Koordinatensystem ausgegangen werden kann. Das äquatoriale System ist lediglich um den Winkel φ gegen den horizontalen Kugelrand geneigt. Zur Zeit der Äquinoxien beschreibt der Schatten einen Großkreis, sonst Kleinkreise, die zur Zeit der Solstitien einen Abstand von $\pm 23,45^\circ$ vom genannten Großkreis haben. Die Linien gleicher Stunde sind durch lemniskatenförmige Zeitgleichungsfiguren ersetzt zu denken.

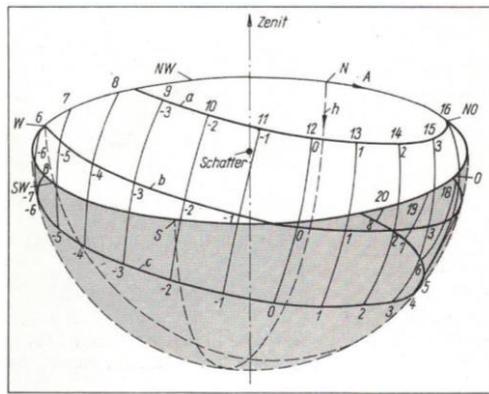


Bild 2. Sonnenuhranordnung mit Halbhohlkugel, die Skale befindet sich auf der Kugelinnenfläche

2.2 Senkrechtstehender Zylinder (Bild 3)

Der punktförmige Schatter befindet sich im Mittelpunkt des oberen Zylinderabschlusskreises. Es werden Azimut α und der Tangens der Höhe h in Zylinderkoordinaten dargestellt:

$$X = \alpha ; H / R = \tan h \quad (9)$$

Die notwendige Höhe des Zylindermantels H_{\max} ergibt sich aus der Sonnenhöhe bei Sommersolstitium zum wahren Mittag:

$$H_{\max} = 90^\circ - \varphi + \varepsilon ; H_{\max} / R = \cot(\varphi - \varepsilon) \quad (10)$$

Bei $\varphi = 51^\circ$ ist beispielsweise $H_{\max} / R = 1,92$. Der zulässige freie Winkel am Zylindermantel, wenn die Sonnenauf- und untergänge mit $h = 0$ beim Sommersolstitium ($\varphi = \varepsilon$) noch erfassbar sein sollen, ergibt sich aus den Untergangszimuten:

$$\cos \alpha_0 = -\sin \varepsilon \sec \varphi \quad (11)$$

Für $\varphi = 51^\circ$ ergibt sich z.B. $\alpha_0 = 129,2^\circ$. Die Linien gleicher Stunde sind durch Zeitgleichungsfiguren ersetzt zu denken. Wenn der Schatter als Stab in der Zylinderachse ausgebildet wird, so zeigt das Gerät auf einem horizontalen Kreis das Sonnenazimut an. Das Azimut ist aber der Zeit nicht proportional!

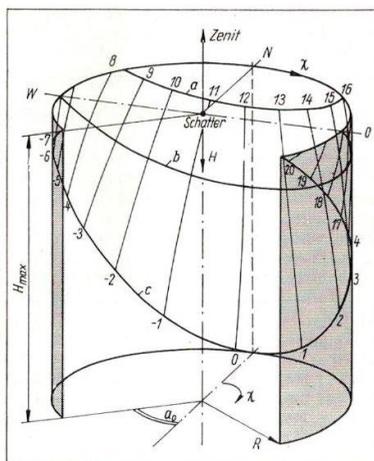


Bild 3. Sonnenuhranordnung mit senkrechtem Zylinder, die Skala befindet sich an der Zylinderinnenfläche

2.3 Zylinder mit Zylinderachse parallel zur Polachse

Der punktförmige Schatten befindet sich auf der Zylinderachse in halber Höhe des Zylinders. X ist τ proportional, die Ausdehnung in Achsrichtung ist $\tan \varphi$ proportional:

$$X = \tau ; c_y = \tan \delta \tag{12}$$

Das maximale δ ist gleich der Ekliptikneigung ε , damit ist die gesamte Zylinderhöhe

$$2c_{y\max} / R = 0,868$$

Die polachsparellen Linien gleicher Stunde sind durch lemniskatenartige Zeitgleichungsfiguren ersetzt zu denken. Wird der Schatten zum polachsparellen Stab verlängert, dann kann der Zylinder zur kreisförmigen Skale schrumpfen. In dieser Form

werden Sonnenuhren sehr häufig aufgebaut, die Möglichkeit der Zeitgleichungskorrektur ist aber damit erschwert. Der Schattenstab muss die Mindestlänge 0,868 aufweisen. Die Darstellung der gesamten Tagesdauer ist in der Nähe des Sonnensolstitiums schwierig, da ein Skalende das andere beschattet.

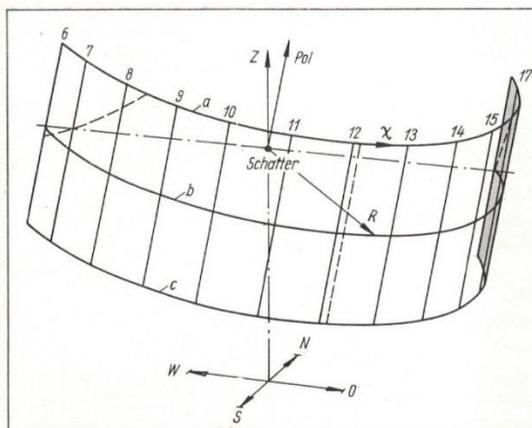


Bild 4. Sonnenuhranordnung mit zum Himmelspol gerichtetem Zylinder, die Skala befindet sich an der Zylinderinnenfläche (Die äußeren oberen Eckbereiche des Zylinders werden vom Schatten nicht erreicht, da sich die Sonne dann unter dem Horizont befindet)

2.3 Vertikale, nach Süden orientierte Ebene (Bild 5)

Verwendet wird ein Schattenstab der Länge A, parallel zur Polachse orientiert. Sein Schnittpunkt mit der Wand ist Koordinatenursprung. Die gleiche Funktion erfüllt ein punktförmiger Schatter mit den Koordinaten

$$c_z / A = -\cos \varphi; \quad c_y / A = \sin \varphi \quad (13)$$

Die Koordinaten des Stabschattenendes oder des Punktschattens sind

$$-c_x / A = \cos \varphi \sin \alpha \sec \alpha \quad (14)$$

$$-c_y / A = [\cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cosh \cos \alpha] \times \operatorname{sech} \sec \alpha \quad (15)$$

Der Winkel des Stabschattens gegen die Senkrechte ist

$$\tan X = -\frac{\cos \varphi \sin \alpha \cos h}{\cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cosh \cos \alpha} \quad (16)$$

Es können nur Zeiten angezeigt werden, für die das Sonnenazimut $\langle \pm 90^\circ$ ist. Für große Azimute werden die Schattenlängen sehr groß. Folgende ausgezeichnete Werte sind interessant: Für 12^h Ortszeit beim Sommersolstitium ergibt sich die größte mittägliche Schattenlänge:

$$-(c_y / A)_s = \cos \varepsilon \csc(\varphi - \varepsilon) \quad (17)$$

Die kleinste mögliche Schattenlänge tritt beim Wintersolstitium zu Mittag auf:

$$-(c_y / A)_w = \cos \varepsilon \csc(\varphi + \varepsilon) \quad (18)$$

Zur Zeit der Äquinorien läuft der Schatten über den Tag hinweg auf einer Geraden:

$$-(c_y / A)_w = \operatorname{konst.} = \csc \varphi \quad (19)$$

Für Uhren mit eindimensionaler (z.B. kreisförmiger) Skale darf demnach der Skalenradius nicht größer sein als $(c_y / A)_w$, sonst wird die Skale im Winter nicht vom Schatten erreicht. Die Linien gleicher Stunde sind durch Zeitgleichungsfiguren ersetzt zu denken.

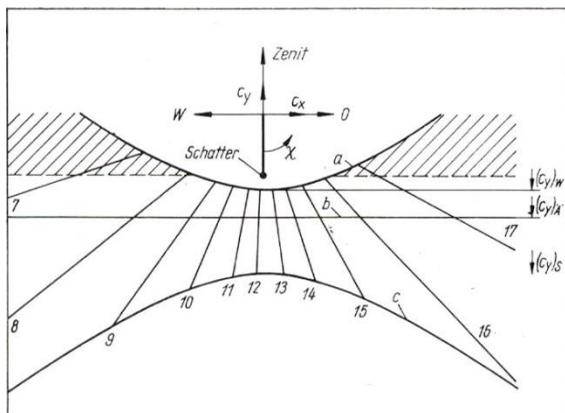


Bild 5. Sonnenuhranordnung mit vertikaler, nach Süden orientierter Ebene, (in den schraffierten Bereichen erfolgt keine Anzeige, weil sich die Sonne unter dem Horizont befindet)

2.5 Horizontale Fläche (Bild 6)

Verwendet wird ein Schattenstab der Länge A , parallel zur Polachse orientiert. Sein Schnittpunkt mit der Ebene ist Koordinatenursprung. Die gleiche Funktion erfüllt ein punktförmiger Schatter mit den Koordinaten:

$$c_z / A = \sin \varphi ; c_x / A = \cos \varphi \quad (20)$$

Die Koordinaten des Stabschattenendes bzw. des Punktschattens sind

$$c_x / A = (\cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cosh \cos \alpha) \csc h \quad (21)$$

$$c_y / A = \sin \varphi \cosh \sin \alpha \csc h \quad (22)$$

Der Winkel des Stabschattens gegen die Senkrechte ist

$$\tan X = \frac{\cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cosh \cos \alpha}{\sin \varphi \cosh \sin \alpha} \quad (23)$$

Es können theoretisch alle Zeiten angezeigt werden, für die die Sonne über dem Horizont steht. Für geringe Sonnenhöhen werden allerdings die Schattenlängen sehr groß. Folgende ausgezeichnete Werte sind interessant: Für 12^h Ortszeit beim Sommersolstitium ergibt sich die absolut kürzeste Schattenlänge

$$(c_y / A)_S = \cos \varepsilon \sec(\varphi + \varepsilon) \quad (24)$$

Die größte mittägliche Schattenlänge beim Wintersolstitium ist

$$(c_y / A)_W = \cos \varepsilon \sec(\varphi - \varepsilon) \quad (25)$$

Zur Zeit der Äquinoktien läuft der Schatten über den Tag hinweg auf einer Geraden:

$$(c_y / A)_W = \text{konst.} = \sec \varphi \quad (26)$$

Für Uhren mit eindimensionaler (z.B. kreisförmiger) Skale ist der Skalenradius $\leq (c_y / A)_S$ zu wählen. Die Linien gleicher Stunde sind durch Zeitgleichungsfiguren ersetzt zu denken.

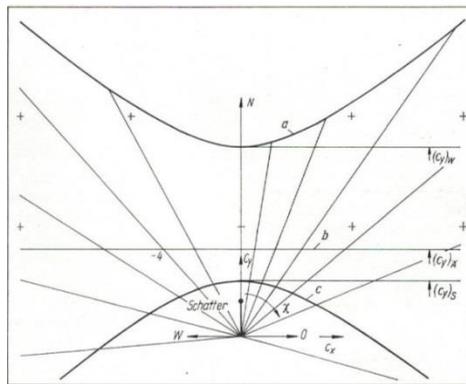


Bild 6. Sonnenuhranordnung mit horizontaler Anordnung

2.6 Beliebige geneigte Fläche

Bezüglich des Schatters gelten die Ausführungen unter 2.4. Die Schattenkoordinaten auf der Schattenebene sind:

$$c_x / A = \frac{\cos \varphi \sin \gamma \sin h}{K} - \frac{\cos \varphi \cos \gamma \sin \alpha \cos h}{K} + \frac{\sin \varphi \sin \gamma \cosh \sin(\alpha + \psi)}{K} \quad (27)$$

$$c_y / A = -\frac{\cos \psi \cos \varphi \sin h}{K} - \frac{\sin \varphi \cosh \cos(\alpha + \psi)}{K} \quad (28)$$

$$K = \sin \gamma \sin h + \cos \gamma \cos h + \cos \gamma \cosh \cos(\alpha + \psi)$$

$$\tan X = \frac{\cos \varphi \sin \gamma \sin \psi \sin h}{G} - \frac{\cos \varphi \cos \gamma \sin \alpha \cos h}{G} + \frac{\sin \varphi \sin \gamma \cosh \sin(\alpha + \psi)}{G}$$

$$G = -\cos \psi \cos \varphi \sin h - \sin \varphi \cosh \cos(\alpha + \psi)$$

ψ Drehung der Schattenebene aus der West-Ost-Richtung, positiv von Westen nach Süden

γ Kippung der Ebene aus der Senkrechten, positiv in Richtung nach Norden

3 Justierung

Die Bestimmung der Normaleinrichtungen für die Schattenebene lässt sich bezüglich der Abweichung von der Senkrechten leicht mit dem Lot oder Libelle ausreichend genau realisieren. Für die Bestimmung des Azimut der Ebenennormale kann z.B. vor der Ebene ein Lot aufgehängt werden, dessen senkrechte Projektion auf die Ebene mit 90°-Winkel, Lineal und Bleistift gekennzeichnet wird. Man bestimmt nun mit Hilfe einer auf einige Sekunden genau gehenden Uhr den Zeitpunkt, zu dem der Schatten des Lotes mit seiner senkrechten Projektion zusammenfällt. Unter Verwendung von Gleichung (3) berechnet man hieraus die wahre Sonnenzeit für

den gemessenen Zeitpunkt. Hiermit und mit den Gleichungen (1), (7) und (8) wird das Azimut der Sonne zum Zeitpunkt der beschriebenen Koinzidenz berechnet. Das Komplement dieses Wertes zu 90° ist der oben benutzte Winkel. Hat man eine justierbare Fläche, so bestimmt man z.B. die MEZ, zu der die Sonne genau im Süden steht und richtet zu diesem Zeitpunkt die Fläche aus. Die anzustrebende Genauigkeit liegt bei einer Zeitminute bzw. 15 Winkelsekunden.

4 Berücksichtigung der Zeitgleichung

Die gemäß Gleichung (4) berechnete Zeitgleichungskorrektur führte dazu, dass jeder Stundenstrich der Sonnenuhr in eine lemniskatenförmige Figur entsprechend Bild 7 ausartet. Lediglich am 27.12., am 11.04., am 20.06. und am 30.08. würde die Zeit ohne derartige Korrektur richtig angegeben. Die Ablesung auf der Zeitgleichungsfigur ist zweideutig: Nur bei Berücksichtigung des Datums kann entschieden werden, auf welcher Seite der Figur abzulesen ist. Die Interpolation zwischen zwei Figuren, die um eine Stunde versetzt sein müssten, damit es keine Überschneidungen gibt – ist nicht ganz einfach.

Bei allen Konstruktionen, für die Teilung nicht proportional τ ist, sind die Zeitgleichungsfiguren von Stunde zu Stunde verschieden, d.h. nur für die Halbkugelkonstruktion mit äquatorialer Teilung und für die Zylinderanordnung mit Achse parallel zur Polachse (entsprechend Abschnitt 2.3.) ergeben sich völlig gleiche Konstruktionen für die lemniskatenförmigen Stundenstrichfiguren.

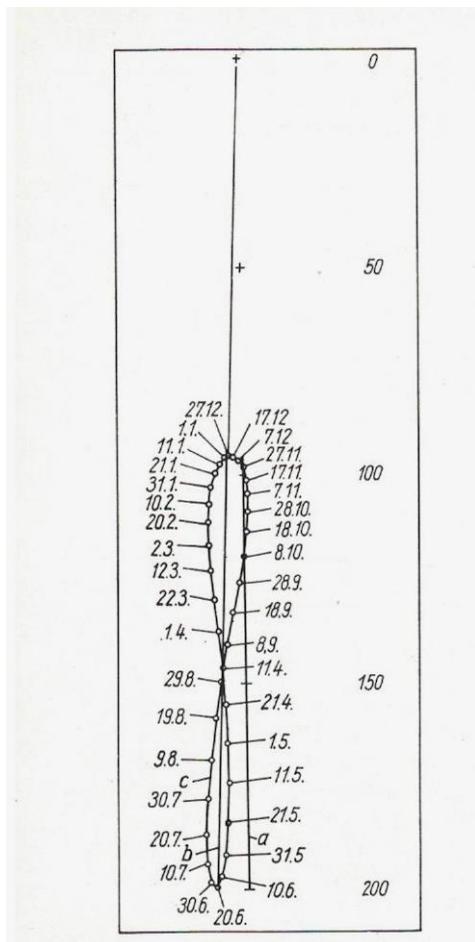


Bild 7. Lage des Schattenendpunktes an einer Sonnenuhr mit Anordnung entsprechend Bild 5 (a Schattenlage um 12^h wahrer Ortssonnenzeit im Jahresverlauf, b Schattenlänge um 12^h wahrer Sonnenzeit auf dem Bezugsmeridian im Jahresverlauf, c Schattenlänge um 12^h mittlerer Sonnenzeit auf dem Bezugsmeridian, Zeitgleichungskurve)

Die zuletzt genannte Konstruktion ermöglicht damit auch zwei andere Möglichkeiten der Korrektur: die Skale kann täglich um den Betrag der Zeitgleichung verschoben werden, was allerdings ständige Wartung bedeutet oder es kann entsprechend dem Vorschlag von *Oliver* [1] der Schattenstab eine doppelknaufförmige Gestalt erhalten. Die Skale wäre je nach Jahreszeit an der linken oder rechten Kante des nun lemniskatenförmigen Schattens abzulesen. Bei anderen Uhrkonstruktionen, insbesondere denen mit ebener Skale, kann zur Vermeidung der Skalenüberschneidung und der erschwerten Interpolation eine Anordnung mit zwei Schattlern verwendet werden. Die Zeitgleichungskurven wären dann beim 27.12. und 20.06. zu teilen und die Hälften untereinander anzuordnen, so dass sich Figuren in der Form geschweifeter Klammern ergeben. Diese Figuren lassen sich dann beliebig dicht benachbart anordnen, so dass das Interpolationsproblem beseitigt ist. Die Herstellung derartiger Skalen ist wegen der zahlreichen und jeweils verschiedenen Skalenstrichfiguren mit einigem Aufwand verbunden.

Literatur

[1] Haslind, G.: Das Horologium Achaz und andere merkwürdige Formen von Sonnenuhren, *Sterne* 36(1960) S. 152-160

Erstveröffentlichung: Feingerätetechnik 10/1981